Morphismes étales entre espaces de Berkovich sur $\mathbb{Z}$: critères par fibres et structure locale

Dorian Berger

14 janvier 2022

Résumé

La géométrie de Berkovich a pour avantage de permettre la construction d'espaces analytiques sur un anneau de Banach quelconque. En particulier, on peut construire des espaces analytiques sur $\mathbb{Z}$ muni de la valeur absolue usuelle et on obtient dans ce cas des espaces naturellement fibrés en espaces analytiques complexes et p-adiques. Dans cet exposé, on se propose d'étudier les morphismes étales entre de tels espaces, induisant un isomorphisme local entre les fibres complexes et un morphisme étale au sens classique entre les fibres p-adiques. On détaillera plus particulièrement les arguments de restriction à la fibre. Les méthodes utilisées permettent d'obtenir les résultats sur une classe d'anneaux plus générale, comprenant les corps valués complets, les anneaux d'entiers de corps de nombres et les anneaux de valuation discrète.

Commençons par rappeler la construction des espaces de Berkovich sur un anneau de Banach issue de [Ber90].

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(\mathcal{A}, \|.\|_{\mathcal{A}})$ un anneau de Banach, c'est-à-dire un anneau normé et complet pour cette norme.

Définition. *Une application* $|.| : \mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathbb{R}_+$ *est une* semi-norme multiplicative sur $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n]$ bornée sur $\mathcal{A}$ *si, pour tout* $P, Q \in \mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n]$ *et pour tout* $a \in \mathcal{A}$*, on a :*
- $|0| = 0$,
- $|1| = 1$,
- $|P + Q| \leq |P| + |Q|$,
- $|PQ| = |P||Q|$,
- $|a| \leq \|a\|_{\mathcal{A}}$.

Définition. *L'ensemble des semi-normes multiplicatives sur* $\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n]$ *bornées sur* $\mathcal{A}$ *est appelé* espace affine analytique de dimension n sur $\mathcal{A}$ *et est noté* $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$*. Dans le cas* $n = 0$*, cet ensemble est noté* $\mathcal{M}(\mathcal{A})$*.*

On munit $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ *de la topologie de la convergence simple, c'est-à-dire la topologie la plus grossière telle que les applications d'évaluations* $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}_+$*,* $|.| \mapsto |P|$ *soient continues pour* $P \in \mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n]$*.*

On pensera aux éléments de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ comme aux points d'un espace et, si $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$, on notera $|.|_x : \mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathbb{R}_+$ la semi-norme associée.

Définition. *Soit* $x \in \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$*. L'idéal* $\ker(|.|_x) \subset \mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n]$ *est premier et* $|.|_x$ *induit une valeur absolue sur*

$$\mathrm{Frac}\left(\mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n] \big/ \ker(|.|_x)\right).$$

Le complété de ce corps est appelé corps résiduel complété en x *et noté* $\mathcal{H}(x)$*.*

On note $\mathrm{ev}_x : \mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n] \to \mathcal{H}(x)$ *l'application* $f \mapsto |f|_x$*. Si* $f \in \mathcal{A}[T_1, \ldots, T_n]$*,* $\mathrm{ev}_x(f)$ *est noté* $f(x)$*.*

On munit $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ d'une structure d'espace localement annelé via le faisceau $U \mapsto \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}}(U)$, où $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}}(U)$ désigne l'ensemble des fonctions sur U qui sont localement limites uniformes de fonctions rationnelles sans pôles.

Définition. *Un* espace $\mathcal{A}$-analytique *est un espace localement annelé localement isomorphe à un espace de la forme* $\left(\mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_U/\mathcal{I}\right), \iota^{-1}(\mathcal{O}_U/\mathcal{I})\right)$ *où* U *est un ouvert d'un espace affine* $\mathcal{A}$*-analytique,* $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_U$ *est un faisceau cohérent d'idéaux et* $\iota : \mathrm{Supp}\left(\mathcal{O}_U/\mathcal{I}\right) \hookrightarrow U$ *est l'inclusion canonique.*

Les espaces $\mathcal{A}$-analytiques s'accompagnent d'une notion de *morphisme d'espaces* $\mathcal{A}$*-analytiques.*

Si x est un point d'un espace $\mathcal{A}$-analytique, le corps résiduel de son anneau local $\mathcal{O}_x$ sera noté $\kappa(x)$. Signalons que ce corps valué n'est pas complet en général et n'est donc pas un anneau de Banach. Une des conséquences de cela est que la restriction aux fibres d'un morphisme d'espaces analytiques est plus subtile que son analogue schématique : si $f : X \to S$ est un tel morphisme et $s \in S$, la fibre $X_s = f^{-1}(s)$ est naturellement munie d'une structure d'espace analytique, non pas sur $\kappa(s)$, mais sur son complété $\mathcal{H}(s)$. Notons tout de même qu'il est démontré dans [Poi13] que $\kappa(s)$ est toujours hensélien.

Afin d'approfondir l'étude des espaces analytiques, il est nécessaire de restreindre l'anneau de base. À partir de maintenant, $\mathcal{A}$ fait partie d'une classe d'anneaux comprenant notamment les exemples suivants :

- les corps valués complets,
- les anneaux d'entiers de corps de nombres $\mathcal{A}$ munis de la valeur absolue $\max_\sigma(|\sigma(.)|_\infty)$ où σ parcourt l'ensemble des plongements complexes de $\mathrm{Frac}(\mathcal{A})$ et $|.|_\infty$ désigne la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{C}$,
- les anneaux de valuation discrète,
- les anneaux de Dedekind trivialement valués.

On rappelle que les espaces analytiques sur de tels anneaux sont étudiés dans [LP20]. On y trouve notamment la cohérence du faisceau structural, l'existence de produits fibrés finis et d'un foncteur d'analytification des schémas ainsi que des analogues du théorème de l'application finie et du Nullstellensatz de Rückert. Ces résultats, comme ceux du reste de l'exposé, sont démontrés sans distinction entre les exemples d'anneaux précédemment cités.

On présente maintenant les morphismes étales d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, dont l'étude est issue de [Ber21].

Définition. *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $x \in X$ et $s = f(x)$. On dit que f est* plat *(resp.* non ramifié*, resp.* étale*) en x si le morphisme induit $f^\sharp_x : \mathcal{O}_s \to \mathcal{O}_x$ est plat (resp. non ramifié, resp étale).*

Pour obtenir des exemples de morphismes étales, on peut utiliser des constructions similaires au cas schématique.

Exemple. *Le morphisme structural $\mathcal{M}(\mathbb{Z}[i]) \to \mathcal{M}(\mathbb{Z})$ est plat en tout point. Il est même étale en tout point excepté le point extrême de la branche $(1+i)$-adique.*

Plus précisément, quitte à ajouter quelques hypothèses supplémentaires sur $\mathcal{A}$, on a le critère par analytification suivant :

Théorème. *Soient* $f : \mathscr{X} \to \mathscr{S}$ *un morphisme entre* $\mathcal{A}$*-schémas localement de présentation finie et* $x \in \mathscr{X}^{\mathrm{an}}$. *Alors* f *est non ramifié (resp. étale) en* $\rho(x)$ *si et seulement si* $f^{\mathrm{an}} : \mathscr{X}^{\mathrm{an}} \to \mathscr{S}^{\mathrm{an}}$ *est non ramifié (resp. étale) en* x.

On se donne pour objectif de démontrer des critères par fibres pour les propriétés de morphisme définies ci-dessus.

Théorème. *Soient* $f : X \to S$ *un morphisme d'espaces* $\mathcal{A}$*-analytiques,* $x \in X$ *et* $s = f(x)$. *Alors le morphisme*

$$\mathcal{O}_x \Big/ \mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x \longrightarrow \mathcal{O}_{X_s,x}$$

est plat.

Afin de démontrer ce théorème, on souhaite décomposer tout morphisme en une partie « algébrique » et une partie « purement transcendante » et traiter indépendamment ces deux parties. Pour faire cela formellement, on introduit les notions suivantes :

Définition. *Soient* $f : X \to S$ *un morphisme d'espaces* $\mathcal{A}$*-analytiques,* $x \in X$ *et* $s = f(x)$. *On dit que* f *est* rigide épais *en* x *si* $\kappa(x)$ *est une extension finie de* $\kappa(s)$. *On dit que* f *est* purement localement transcendant *en* x *si* $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x$.

Exemple. *Soient* S *un espace* $\mathcal{A}$*-analytique et* $x \in \mathbb{A}^n_S$. *On note* $T_1, \dots, T_n$ *les coordonnées de* $\mathbb{A}^n_S$. *Alors* $\pi : \mathbb{A}^n_S \to S$ *est rigide épais en* x *si et seulement si* $T_1(x), \dots, T_n(x)$ *sont algébriques sur* $\kappa(\pi(x))$. *De plus,* π *est purement localement transcendant en* x *si et seulement si* $1, T_1(x), \dots, T_n(x)$ *sont algébriquement indépendants sur* $\kappa(\pi(x))$.

De manière général, si un morphisme $f : X \to S$ *est rigide épais et purement localement transcendant en un point* $x \in X$, *alors* $\dim_x f = 0$.

Remarque. *Les morphismes non ramifiés sont rigides épais et purement localement transcendants.*

Idée de la preuve du théorème. Quitte à restreindre X et S, on dispose d'un espace $\mathcal{A}$-analytique Y tel que f se factorise de la façon suivante :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[dl, "\pi_S"] \\ S & \end{tikzcd}$$

où $\widetilde{f}$ est rigide épais en x et π_S est purement localement transcendant en $y = \widetilde{f}(x)$ (on peut même choisir pour Y un espace affine sur S). Alors $\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_y$ est un corps et $\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_{Y_s,y}$ est donc plat. De plus, comme $\widetilde{f}$ est rigide épais en x, on se ramène au cas $X = \mathbb{A}^n_Y$, $n \in \mathbb{N}$ et x est le point 0 de la fibre $\widetilde{f}^{-1}(y)$. Dans ce cas, on a $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{O}_y[\![T_1, \ldots, T_n]\!]$ et on peut conclure par un critère de platitude local : pour tout $l \geq 1$, le morphisme

$$\mathcal{O}_x \Big/ \left(\mathfrak{m}_s + (T_1, \ldots, T_n)^l\right) \longrightarrow \mathcal{O}_{X_s,x} \Big/ (T_1, \ldots, T_n)^l$$

est égal au morphisme

$$(\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_y)[T_1, \ldots, T_n] \Big/ (T_1, \ldots, T_n)^l \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_s,y}[T_1, \ldots, T_n] \Big/ (T_1, \ldots, T_n)^l$$

qui est plat. □

Corollaire (Critère de platitude par fibres). *Soient S un espace $\mathcal{A}$-analytique, $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces S-analytiques, $x \in X$, $y = f(x)$ et $s \in S$ l'image de x. On suppose que $X \to S$ est plat en x. Si $f_s : X_s \to Y_s$ est plat en x alors $f : X \to Y$ est plat en x et $Y \to S$ est plat en y.*

Démonstration. Comme $\mathcal{O}_{X_s,x}$ est fidèlement plat sur $\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_y$ et sur $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x$, on en déduit que $\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_y \to \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x$ est plat et on conclut par le critère de platitude par fibres classique. □

Passons maintenant au critère de ramification par fibres. Comme $\kappa(s)$ est hensélien et $\mathcal{H}(s)$ est son complété, on sait que $\kappa(x)$ est une extension finie séparable de $\kappa(s)$ si et seulement si $\mathcal{H}(x)$ est une extension finie séparable de $\mathcal{H}(s)$. Il reste donc à montrer que $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_x$ est un corps si et seulement si $\mathcal{O}_{X_s,x}$ en est un. D'après le théorème, le sens réciproque est bien vérifié. Le sens direct n'est pas vrai en général mais c'est bien le cas si f est rigide épais en x d'après la proposition suivante :

Proposition. *Soient $f : X \to S$ un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytiques, $x \in X$ un point rigide épais et $s = f(x)$. On a alors :*

$$\mathfrak{m}_{X_s,x} = \sqrt{\mathfrak{m}_x\mathcal{O}_{X_s,x}}.$$

Remarque. *Le radical provient du fait que le polynôme minimal de x à coefficients dans $\kappa(s)$ est une puissance du polynôme minimal de x à coefficients dans $\mathcal{H}(s)$. Dans notre cas, on peut supposer que $\kappa(x)$ est séparable sur $\kappa(s)$ et on a donc $\mathfrak{m}_{X_s,x} = \mathfrak{m}_x\mathcal{O}_{X_s,x}$.*

Corollaire. *Soient* $f : X \to S$ *un morphisme d'espaces* $\mathcal{A}$*-analytiques,* $x \in X$ *et* $s = f(x)$*. Alors* f *est non ramifié en* x *si et seulement si le morphisme* $f_s : X_s \to \mathcal{M}(\mathcal{H}(s))$ *est non ramifié en* x*.*

Comme un morphisme est étale si et seulement s'il est plat et non ramifié, on en déduit :

Corollaire. *Soient* S *un espace* $\mathcal{A}$*-analytique,* $f : X \to Y$ *un morphisme d'espaces* S*-analytiques,* $x \in X$*,* $y = f(x)$ *et* $s \in S$ *l'image de* x*. On suppose que* $X \to S$ *est plat en* x*. Si* $f_s : X_s \to Y_s$ *est étale en* x *alors* $f : X \to Y$ *est étale en* x*.*

Énonçons à présent un résultat concernant la structure locale des morphismes étales.

Proposition. *Soient* $f : X \to S$ *un morphisme d'espaces* $\mathcal{A}$*-analytiques,* $x \in X$ *et* $s = f(x)$*. Alors* f *est étale en* x *si et seulement si on dispose d'un polynôme unitaire* $P(T) \in \mathcal{O}_s[T]$ *dont l'image dans* $\kappa(s)[T]$ *est irréductible et séparable et tel que* f *induise un isomorphisme :*

$$\mathcal{O}_s[T] \Big/ (P(T)) \cong \mathcal{O}_x.$$

Les bonnes propriétés topologiques des espaces en jeu permettent de se passer de l'opération de localisation nécessaire à l'analogue schématique de cette proposition. Plus précisément, la preuve de ce résultat repose sur le lemme suivant :

Lemme. *Soient* $f : X \to S$ *un morphisme d'espaces* $\mathcal{A}$*-analytiques,* $x \in X$ *et* $s = f(x)$*. Si* f *est non ramifié en* x *alors le morphisme induit* $f_x^\sharp : \mathcal{O}_s \to \mathcal{O}_x$ *munit* $\mathcal{O}_x$ *d'une structure de* $\mathcal{O}_s$*-module de présentation finie.*

Illustrons ce phénomène par un exemple :

Exemple. *Soient* $\mathscr{S} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$*,* $\mathscr{X} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[i])$*,* $f : \mathscr{X} \to \mathscr{S}$ *le morphisme structural,* $x \in \mathscr{X}^{\mathrm{an}}$ *le point extrême de la branche* $(1+2i)$*-adique,* $s = f^{\mathrm{an}}(x)$*,* $\xi = \rho(x)$ *et* $\sigma = f(\xi)$*. Le polynôme* $Q(T) = T^2 + 1$ *est irréductible dans* $\mathcal{O}_\sigma[T] \cong \mathbb{Z}_{(5)}[T]$ *et tout voisinage de* ξ *se plonge bien dans* $\mathscr{X} \cong V(Q(T)) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^{1,\mathrm{sch}}$*. Dans ce cas,* $\mathscr{X}_\sigma$ *contient deux points distincts. Par contre,* $Q(T)$ *est scindé dans* $\mathcal{O}_s[T] \cong \mathbb{Z}_5[T]$ *et, en choisissant un de ses facteurs irréductibles* $P(T)$*, on dispose d'un voisinage de* x *qui se plonge dans* $\mathscr{S}^{\mathrm{an}} \cong V(P(T)) \subset \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$*.*

Références

[Ber21] Dorian Berger. *Espaces de Berkovich sur Z : morphismes étales*. Déc. 2021. URL : http://arxiv.org/abs/2112.02907.

[Ber90] Vladimir G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-archimedean fields*. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 1990.

[LP20] Thibaud Lemanissier et Jérôme Poineau. *Espaces de Berkovich sur Z : catégorie, topologie, cohomologie*. 2020.

[Poi13] Jérôme Poineau. "Espaces de Berkovich sur Z : étude locale". In : *Inventiones mathematicae* 194 (2013).